

Tema 23

El PERT

Introducción

Las principales aplicaciones de la Teoría de Grafos son los *arboles*, las *redes* y la aplicación a proyectos secuenciales.

El PERT: idea y utilidad

El nombre de PERT proviene de la expresión inglesa *Program Evaluation and Review Technique* (técnica de valoración y análisis de proyectos).

Puede definirse el PERT como aquella técnica basada en la Teoría de Grafos, que se aplica al control de proyectos con el objeto de optimizar, desde el punto de vista económico, su ejecución.

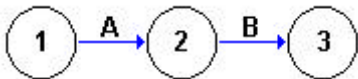
Finalidades:

1. Calcular el tiempo de duración de la ejecución de un proyecto, así como el de las actividades que lo integran. A este cálculo se le llama búsqueda del camino crítico o *PERT-Tiempo*. Cuando se trabaja en base a probabilidades, estamos ante el llamado *PERT-Incertidumbre*.
2. Búsqueda de la utilización óptima de los recursos empleados y el estudio de la incorporación de posibles nuevos recursos. En este caso, no se trabaja con tiempos, sino con costes y su nombre es el de *PERT-Coste*.
3. La aplicación, quizás, más importante del PERT está constituida por su aplicación al seguimiento y control de proyectos.

Planteamiento del problema

El término actividad puede significar, en este método, tanto una tarea a ejecutar, como un tiempo de espera.

Representaremos cada actividad por un marco como el siguiente:



Esta técnica nos permite expresar gráficamente las prelacións y dependencias entre las actividades. Es necesario aclarar que las dependencias o restricciones pueden ser tanto de tipo físico, técnico, jurídico o económico.

Como consecuencia de las actividades, se llega a una serie de sucesos o situaciones, a los que llamaremos nudos o vértices, que indican la posibilidad de llevar a cabo nuevas tareas, toda vez que se haya llegado a las mismas.

Fases para crear un grafo PERT:

1. Determinación de las actividades.
2. Estudio de las dependencias o restricciones y construcción de los grafos parciales.
3. Agrupación de los grafos parciales y determinación del momento inicial y final del proyecto.
4. Construcción de la red.

Una vez representado el proyecto en cuestión en forma de grafo, debe procederse a la asignación de tiempos a cada una de las actividades. Esta puede hacerse de un modo:

- **Modo determinístico:** se asignan tiempos de duración que son aproximados a la realidad.
- **Modo estocástico o aleatorio:** se considera a la duración de cada actividad como una variable aleatoria con una determinada función de distribución. Se calculan los tiempos mínimo, normal y máximo de ejecución de cada actividad, es decir, nos ponemos en la situación más optimista, en la normal y en la más pesimista. Con estos 3 tiempos se calcula una media ponderada a la que se denomina *Tiempo-PERT*:

$$TP = \frac{To + (4 \cdot Tn) + Tp}{6}$$

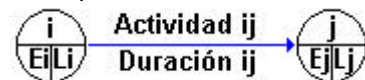
TP=Tiempo-PERT

To=Tiempo optimista

Tn=Tiempo normal

TP=Tiempo pesimista

Convenios de representación:



Las reglas a observar en la construcción del grafo son las siguientes:

1. **Principio de designación unívoca de las actividades:** significa que cada actividad debe ser expresada de forma clara y diferenciada en el grafo, de tal modo que si varias actividades comenzasen y terminasen en el mismo nudo se recurriría a lo que se llaman *actividades ficticias* para diferenciarlas en el gráfico (se dibujan con rayas punteadas).
2. **Principio de secuencias unívocas:** esto significa que el proyecto debe estar fielmente representado en el grafo; lo cual obliga a evitar aquellas representaciones que pudieran implicar errores.

3. **Principio de designación sucesiva de las actividades:** que prohíbe, al ir asignando sucesivamente los números naturales a los vértices, numerar un nudo se encuentra sin numerar alguno de los nudos de los que parten flechas que finalizan en él.
4. **Principio de estado inicial y final:** que significa que pese a que existan diferentes comienzos y finales del proyecto, éstos, a efectos de cálculo, deben hacerse coincidir en un solo nudo.

Holguras

A las actividades que están situadas sobre el camino crítico, se las denominan actividades críticas. Estas actividades tienen la característica de que cualquier retraso en su ejecución implica un retraso en la finalización del proyecto.

Definiciones:

- **Holguras:** es margen de tiempo que tienen las actividades no críticas para su realización. El tamaño concreto de la holgura dependerá del momento en el que se alcance el nudo de origen y de cuando se llegue al de destino.
- **Tiempo early:** de un determinado acontecimiento (E_i), es el momento en el que dicha situación se alcanzará como muy pronto.
- **Tiempo last:** de un determinado nudo (L_i), es el momento más tardío en el que se puede llegar a un determinado acontecimiento o situación (nudo) sin que ello perjudique la duración total del proyecto.

Tipos de holguras:

- **Tiempo de oscilación de un nudo:** es la diferencia entre sus tiempos *last* y *early*.

$$O_i = L_i - E_i$$

- **Holgura total:** o tiempo de fluctuación de una actividad es el margen de tiempo sobrante, suponiendo que a la situación representada por el nudo de origen se llega lo más pronto posible y que a la de destino se llega lo más tarde que es admisible.

$$H_T = L_j - E_i - D_{ij}$$

- **Holgura libre:** es el margen de tiempo sobrante, suponiendo que el nudo de origen se llega lo más pronto posible y que al destino se llega también lo más pronto posible.

$$H_L = E_j - E_i - D_{ij} = H_T - O_j$$

- **Holgura independiente:** es el margen que sobra, suponiendo que al nudo de origen se llega lo más tarde que es admisible y que al de destino se llega lo más pronto posible.

$$H_I = E_j - L_i - D_{ij} = H_L - O_i$$

Algoritmo de resolución

Cálculo de los tiempos early

El tiempo *early* de cada nudo vendrá constituido por el más largo de los caminos parciales que a él lleguen, ya que, para que se dé la situación que el nudo define, es preciso que se hayan realizado todas las actividades que al mismo llegan.

Cálculo de los tiempos last

En este caso se procede de forma inversa; se parte del nudo de término, cuyo tiempo *last* se conoce por coincidir con el tiempo *early* (ya que está necesariamente en el camino crítico). En este caso, se estudian los caminos que del nudo en cuestión parten y el tiempo necesario para su realización, viniendo el tiempo *last* del nudo antedicho, definido por el más corto de los caminos que de él mismo parten, ya que éste será el momento más tardío en el que se puede partir de dicho nudo para llegar al final del proyecto sin incurrir en retrasos.

Cálculo de las holguras

Se calculan las siguientes holguras por cada actividad: holgura total, oscilación del nudo de término, holgura libre, oscilación del nudo de origen y holgura independiente.

Ejemplo de PERT-Tiempo:

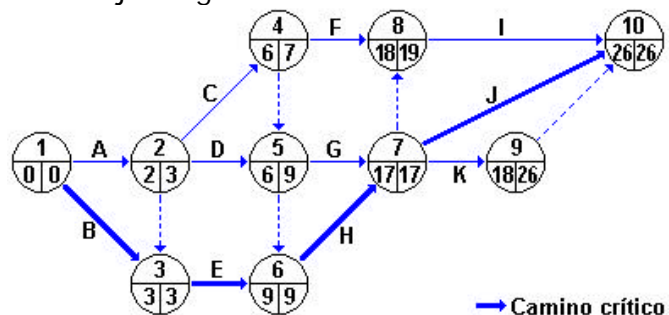
Un proyecto consta de las siguientes actividades: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K. Las duraciones estimadas respectivamente para estas actividades son las siguientes: 2, 3, 4, 1, 6, 12, 2, 8, 7, 9 y 1 semanas.

Sabiendo que la interrelación temporal entre las mismas es:

- La actividad A precede a las actividades C, D y E.
- La actividad B precede a la E.
- La actividad C precede a la F.
- Las actividades C y D preceden a la G.
- Las actividades C, D y E preceden a la H.
- Las actividades G, H y F preceden a la I.
- Las actividades G y H preceden a la J y K.

Se pide:

1. Dibujar el grafo PERT.



2. Decir cuáles son las actividades críticas.
Actividades críticas = 1, 3, 6, 7 y 10.
3. Calcular la duración del camino crítico.
 $B + E + H + J = 3 + 6 + 8 + 9 = 26$ semanas.

El PERT-Incertidumbre

Sirve para calcular la probabilidad de terminar en un determinado número de días, o bien, dada una probabilidad, en qué número de días podría terminarse el proyecto.

El procedimiento consiste en la consideración de una variable aleatoria, de media igual al camino crítico, y de varianza igual a la suma de las actividades del camino crítico que, por el teorema central del límite, tiende a una distribución normal de características específicas. Supuesto esto, puede calcularse la probabilidad de cualquier suceso, ya que la distribución normal se encuentra tabulada, conociéndose su función de densidad.

El PERT-Coste

Consiste en la reducción de los costes del proyecto. En este método, se asignan unos costes a cada actividad del proyecto. La existencia de holguras posibilita el emplear recursos inactivos a la reducción del camino crítico (con el consiguiente ahorro de tiempo y dinero), así como el mejor empleo de los recursos en cada momento.